



Universitat d'Alacant
Universidad de Alicante

Innovaciones metodológicas en docencia universitaria: resultados de investigación

Coordinadores

José Daniel Álvarez Teruel

Salvador Grau Company

María Teresa Tortosa Ybáñez

Coordinadores
José Daniel Álvarez Teruel
Salvador Grau Company
María Teresa Tortosa Ybáñez

© Del texto: los autores. 2016
© De esta edición:
Universidad de Alicante
Vicerrectorado de Estudios, Formación y Calidad
Instituto de Ciencias de la Educación (ICE), 2016

ISBN: 978-84-608-4181-4

Revisión y maquetación:
Salvador Grau Company
Daniel Gallego Hernández

69. Tecnologías de la Información y Comunicación aplicadas a la Educación Matemática (TICEM)

*C. Fernández Verdú; M. Moreno Moreno; M. L. Callejo de la Vega;
S. Llinares Ciscar; G. Sánchez-Matamoros García; G. Torregrosa-Gironés;
À. Buforn Lloret; P. Ivars Santacreu*

Departamento Innovación y Formación Didáctica
Universidad de Alicante

RESUMEN. Los objetivos de la Red TICEM en el curso académico 2014-2015 han sido (i) diseñar, implementar y evaluar metodologías docentes que proporcionen una formación eficaz en competencias en relación a la enseñanza de las matemáticas y (ii) elaborar y revisar materiales curriculares. Para ello se han caracterizado los procesos a través de los cuales los estudiantes para maestro y estudiantes para profesor de matemáticas identifican e interpretan aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza y aprendizaje como fundamento de la competencia “mirar profesionalmente la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas”. Metodológicamente se ha seguido una aproximación basada en experimentos de enseñanza. Esta metodología ha sido usada y validada por el grupo TICEM en otras convocatorias del proyecto REDES. Este método sigue tres fases: (i) elaboración de materiales, (ii) implementación, y (iii) análisis.

Palabras clave: experimentos de enseñanza, interpretar aprendizaje matemático, competencia docente “mirar profesionalmente”.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de metodologías docentes de enseñanza-aprendizaje concordantes con el proceso de convergencia en el EEES que pone en práctica la Red TICEM a lo largo de las distintas convocatorias realizadas por el ICE-UA, ha hecho necesario: (a) caracterizar los procesos a través de los cuales los estudiantes para maestro identifican e interpretan aspectos relevantes de las situaciones de enseñanza y aprendizaje que les permitirá el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes”, y (b) diseñar, elaborar e implementar materiales curriculares que han permitido a los estudiantes para maestro y futuros profesores de matemáticas adquirir esta competencia que implica la capacidad de identificar e interpretar los sucesos de una clase para tomar decisiones como maestros y profesores. La competencia de interpretar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se apoya en la capacidad de vincular lo particular a lo general y es el germen del desarrollo del conocimiento profesional (Fortuny y Rodríguez, 2012; Llinares, 2012a, 2012b).

Por otra parte, la implementación de estas metodologías ha exigido la coordinación entre los formadores de profesores que han compartido el mismo ámbito de actuación, la Didáctica de la Matemática. Esta coordinación ha sido efectiva por el trabajo colaborativo llevado a cabo entre los formadores de profesores tal como se ha venido poniendo de manifiesto por la Red TICEM dentro de las convocatorias de proyectos de Redes de Investigación en Docencia Universitaria-EEES realizadas por el ICE-UA en los últimos años (Fernández et al., 2011; 2012; 2013; 2014; Llinares et al., 2007; Penalva et al., 2005; Valls et al., 2009).

En este contexto y desde las referencias del trabajo previo de la Red TICEM durante los últimos años, se generaron dos grupos de objetivos para el curso 2014-2015.

- Diseñar, implementar y evaluar metodologías docentes que proporcionen una formación eficaz en competencias en relación a la enseñanza de las matemáticas y
- Elaborar y revisar materiales curriculares.

2. METODOLOGÍA

Todo experimento de enseñanza consta de tres fases que forman “un ciclo de investigación” (Callejo et al., 2007; Simon, 2000):

- Fase 1. Diseño y planificación de la instrucción. En esta fase se fijan los objetivos de aprendizaje, se diseñan las actividades que facilitan el logro de los objetivos y se caracteriza una “trayectoria hipotética de aprendizaje”.
- Fase 2. Implementación. Esta fase corresponde a la puesta en práctica de las tareas diseñadas en la fase anterior.

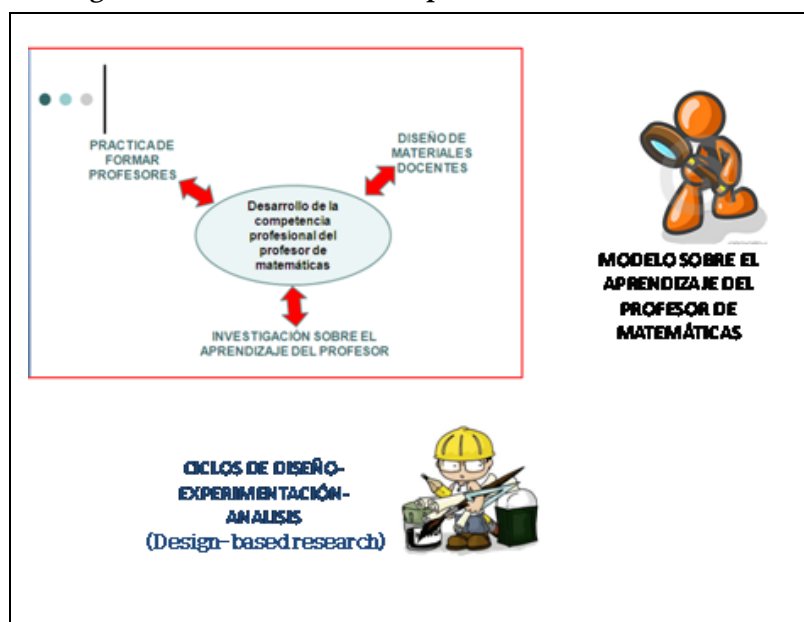
- Fase 3. Análisis retrospectivo. En esta fase se realiza el análisis de la experiencia desde las referencias teóricas.

Estos experimentos de enseñanza generan: (a) espacios de interacción y reflexión entre los miembros del equipo docente para focalizar la atención en la actividad realizada en el experimento e identificar elementos de una buena práctica docente en el contexto universitario (Callejo, Valls y Llinares, 2007; Rey, Penalva y Llinares, 2007) y, (b) oportunidades de reflexión a los futuros maestros y profesores de matemáticas sobre la planificación y organización de la enseñanza, el análisis e interpretación de las producciones de los estudiantes y la gestión de la clase (Llinares, 1998).

El diseño, implementación y análisis de experimentos de enseñanza llevado a cabo por los equipos docentes constituidos por formadores de maestros que comparten responsabilidades en determinadas asignaturas de la facultad de Educación de la Universidad de Alicante y de Sevilla ha sido concebido para el desarrollo de competencias profesionales de los futuros maestros y profesores de matemáticas.

La idea de Ciclos de diseño- experimentación-análisis pone de manifiesto una manera de entender el proceso de mejora paulatina de las oportunidades de aprendizaje vinculado a la información procedente de los análisis de las implementaciones iniciales (Figura 1). Esta situación evidencia la relación entre la práctica de formar maestros y profesores, el diseño de materiales docentes y la investigación sobre el aprendizaje del docente (Llinares, 2014).

Figura 1. Ciclos de diseño- experimentación-análisis



3. RESULTADOS

La sección de resultados está organizada a través de la descripción de tres “experimentos de enseñanza” realizados por diferentes equipos docentes durante

el curso académico 2014-2015 que constituyen la red TICEM vinculados a las siguientes asignaturas:

- Máster de Formación de profesorado de Educación Secundaria especialidad Matemáticas.
 - Aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria
- Grado en Maestro en Educación Primaria
 - Prácticum
 - Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria

3.1. Experimento de Enseñanza 1. Máster de Formación de profesorado de Educación Secundaria especialidad de matemáticas. Asignatura: Aprendizaje de las matemáticas en Educación Secundaria. Créditos: 5

Contextualización y marco de referencia

Los resultados de las investigaciones sobre la competencia docente “mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes” están ayudando a comprender cómo los estudiantes para profesor aprenden a usar el conocimiento de matemáticas para interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes (Franke & Kazemi, 2001; Sherin, Jacobs & Philipp, 2010).

Una consecuencia de estas investigaciones es la necesidad de crear módulos de enseñanza en los programas de formación de profesores en el área de matemáticas que permitan el desarrollo de esta competencia diseñando oportunidades que favorezcan el aprendizaje de los estudiantes para profesor sobre cómo los estudiantes comprenden los conceptos matemáticos y cómo progresan en su comprensión (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Sánchez-Matamoros, Fernández, & Llinares, 2014; Wilson, Mojica, & Confrey, 2013).

Un constructo que está ayudando a pensar en la manera en la que los estudiantes para profesor aprenden sobre el aprendizaje de los estudiantes es las trayectorias de aprendizaje (Wilson, Sztajn, Edgington, Confrey, 2014; Sztajn, Confrey, Wilson, & Edgington, 2012) las cuales aportan información sobre cómo los aprendices progresan desde formas de pensar menos sofisticadas a más sofisticadas. Aunque se han hecho progresos para caracterizar trayectorias de aprendizaje en diferentes dominios matemáticos (Clements & Sarama, 2009) y para conectar los estándares con el currículo (Confrey, Maloney & Corley, 2014), existen menos investigaciones sobre cómo los estudiantes para profesor pueden reconocer la progresión en la comprensión de los estudiantes de secundaria y cómo este reconocimiento puede ayudarles a tomar decisiones instruccionales.

Fase 1. Diseño y planificación de la instrucción

Para desarrollar la competencia docente “mirar profesionalmente” la comprensión del concepto de límite de una función en un punto de los alumnos de bachillerato, de los estudiantes para profesor de secundaria (EPS), se diseñó un módulo de enseñanza de cuatro sesiones con una duración de dos horas cada una de ellas (Tabla 1).

En las cuatro sesiones los EPS realizaron diferentes actividades apoyándose en la información teórica ofrecida en cada una de ellas. Las sesiones se organizaron alrededor de 3 problemas sobre el límite de una función en un punto para 1er curso de Bachillerato.

Tabla 1. Secuencia de las actividades del experimento de enseñanza (módulo de aprendizaje diseñado en el programa de formación)

Sesiones	Actividades	Documento Teóricos. Objetivo
1	Resolución en grupo de la tarea 1 (Características problemas sobre límite función en un punto) Discusión sobre la resolución de la tarea 1	Documento teórico sobre la concepción dinámica de límite Crear un contexto, presentando a los EPS artefactos de la práctica (3 problemas de los libros de textos), para activar el conocimiento sobre los elementos matemáticos y modos de representación que están vinculados al límite de una función en un punto
2	Resolución en grupo de la tarea 2 (Anticipar respuestas sobre 3 problemas de límite de una función) Discusión sobre la resolución de la tarea	Crear oportunidades para que los EPS anticipen, compartan y consensuen una hipotética trayectoria de aprendizaje del límite de una función en un punto en estudiantes de bachillerato
3 y 4	Resolución en grupo de la tarea 3 (Reconocer comprensión de los estudiantes) Discusión sobre la resolución de la tarea 3	Documento de teoría sobre una trayectoria de aprendizaje del límite de una función en un punto Identificar distintas características de la comprensión matemática en una hipotética trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de primero de bachillerato sobre el límite de una función en un punto

En la primera sesión se les pidió a los EPS, distribuidos en grupos, que resolvieran los tres problemas sobre límite de una función en un punto, representados en distintos modos algebraico, numérico y gráfico (Tabla 2), indicando en cada momento qué elementos matemáticos y modos de representación se ponían de manifiesto. Para la resolución de la tarea se les proporcionó un documento teórico con los elementos matemáticos que conforman el concepto de límite de una función en un punto (Pons, Valls y Llinares, 2012):

- Idea de función
- Idea de aproximación lateral por la derecha y por la izquierda:
 - o en el dominio
 - o en el rango (coincidentes o no coincidentes)
- Coordinación de los dos procesos de aproximación en el dominio y en el rango (coincidente y no coincidente).

Tabla 2. Esquema de la tarea propuesta en la sesión 1

Problema 1 en modo algebraico	Problema 2 en modo numérico	Problema 3 en modo gráfico
Pregunta		
Resuelve los tres problemas indicando en cada momento qué elementos matemáticos y modos de representación se ponían de manifiesto.		

En la sesión 2, se les formuló una tarea formada por los tres problemas planteados en la sesión 1 y tres cuestiones de tipo profesional (Tabla 3).

Tabla 3. Esquema de la tarea planteada en la sesión 2

Problema 1 en modo algebraico	Problema 2 en modo numérico	Problema 3 en modo gráfico
Cuestiones Profesionales		
Indica que tendría que hacer y decir exactamente María, una alumna de 1º de bachillerato, en cada problema, para indicarte que ha comprendido el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.		
Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente Pedro, otro alumno de 1º de bachillerato, en cada problema, para que muestre que tiene ciertas características de la comprensión del concepto de límite pero que no ha sido capaz de alcanzar el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.		
Como profesor de estos alumnos propón tareas concretas, para confirmar que María ha alcanzado el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.		
para que Pedro alcance el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.		

El objetivo de estas cuestiones era analizar el potencial de los problemas escolares (consideradas como registros de la práctica) para explorar posibles trayectorias de aprendizaje (explicitando rasgos de lo que se puede considerar diferentes niveles de comprensión en el estudiante de secundaria en la resolución de los problemas).

Las dos primeras preguntas tienen como objetivo generar respuestas hipotéticas que reflejen diferentes niveles de desarrollo conceptual del concepto de límite de una función en un punto en los estudiantes de primero de Bachillerato. Responder a estas cuestiones exige a los estudiantes para profesor poner en relación sus interpretaciones de lo que el estudiante está pensando y haciendo al resolver los problemas, lo que les obliga a situarse en una “hipotética trayectoria de aprendizaje” del concepto de límite de una función en un punto.

La tercera cuestión tiene como objetivo que los EPS propongan nuevos problemas para ayudar a los estudiantes de secundaria a avanzar en la comprensión del concepto, es decir, se centra en las decisiones de enseñanza que deben tomar para promover la transición de los estudiantes de secundaria a lo largo de la “hipotética trayectoria de aprendizaje” que han considerado.

En la tercera y cuarta sesión, se les pidió a los EPS que resolvieran una tarea formada por los tres problemas planteados con la respuesta de cuatro estudiantes de primero de bachiller a esos tres problemas y tres preguntas profesionales (Tabla 4).

El estudiante 1 y el estudiante 3 resuelven bien los tres problemas usando todos los elementos de la concepción dinámica de límite de una función en un punto en los tres modos de representación, algebraico, numérico y gráfico. El estudiante 2, sin embargo, solo es capaz de realizar aproximaciones laterales y coordinaciones coincidentes en modo gráfico (problema 3) y tiene dificultades en

usar las aproximaciones laterales no coincidentes y coordinarlas en modo algebraico y numérico (problema 1 y 2). Por su parte, el estudiante 4, realiza aproximaciones laterales coincidentes y no coincidentes y las coordina en modo numérico y gráfico y tiene dificultades en realizar las aproximaciones laterales no coincidentes en modo algebraico.

Los cuatro estudiantes se encuentran en distintos momentos de la trayectoria de aprendizaje definida y caracterizada por las investigaciones (Pons, 2014) a partir de la idea de coordinación dinámica, de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden o no, teniendo en cuenta los modos de representación (gráfico, numérico y algebraico).

Las dos primeras cuestiones, piden a los EPS que identifiquen e interpreten características de la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de límite de una función en un punto reflejadas en sus respuestas y que los agrupen según estas características. El objetivo de estas cuestiones era determinar en qué medida los EPS tenían una visión global de las respuestas dadas por un mismo estudiante a los tres problemas y ver si eran capaces de identificar características de su comprensión. La tercera cuestión tenía como objetivo analizar cómo los EPS tomaban decisiones de enseñanza para favorecer el avance en la comprensión del concepto.

Tabla 4. Esquema de la tarea planteada en la sesión 3 y 4

Problema 1 en modo algebraico	Problema 2 en modo numérico	Problema 3 en modo gráfico
Respuestas a los problemas		
Estudiante 1	Estudiante 1	Estudiante 1
Estudiante 2	Estudiante 2	Estudiante 2
Estudiante 3	Estudiante 3	Estudiante 3
Estudiante 4	Estudiante 4	Estudiante 4
Cuestiones profesionales		
Describe en cada uno de los problemas qué elementos matemáticos de la concepción dinámica de límite ha usado el ESTUDIANTE X para resolverlos e indica si ha tenido dificultades y por qué		
A partir de las descripciones de cómo el ESTUDIANTE X ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de límite de una función en un punto? Justifica tu respuesta a partir de los elementos y los modos de representación.		
Considerando la comprensión de límite de una función en un punto del ESTUDIANTE X mostrada en la resolución de los problemas, diseña una tarea para mejorar esta comprensión. Justifica tu respuesta.		

Fase 2. Implementación

Este experimento de enseñanza fue implementado en la asignatura “Aprendizaje de las matemáticas en educación Secundaria” del Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria, especialidad Matemática, en la que se matricularon 22 estudiantes. La asignatura se impartió durante 4 horas por semana durante 13 semanas. Uno de los objetivos era aprender a identificar

evidencias de la comprensión de los estudiantes (mirar profesionalmente) a partir de respuestas a tareas y proponer nuevas tareas para promover la comprensión conceptual de la concepción dinámica de límite de una función en un punto (Blázquez y Ortega, 2001; Cottrill et al., 1996).

Fase 3. Análisis retrospectivo

La implementación del experimento de enseñanza ha puesto de manifiesto la potencialidad del mismo para que los estudiantes para profesor de secundaria sean capaces de considerar la comprensión como una progresión y no tanto como una dicotomía en la que alumno comprende o no comprende.

El cambio producido por los estudiantes para profesor de secundaria en la forma de considerar la comprensión del concepto de límite de los estudiantes de bachillerato muestra cómo es posible incidir en el desarrollo de la competencia docente “mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes”.

La información teórica facilitada a los estudiantes para profesor de secundaria permitió que éstos identificasen distintas características de la comprensión del límite de una función en un punto en una hipotética trayectoria de aprendizaje de los estudiantes de primero de bachillerato. Esta identificación se puso de manifiesto mostrando un cambio en su concepción inicial (dicotomía todo/nada) de la comprensión del límite asumiendo que dicha comprensión es progresiva.

Hacer partícipes a los estudiantes para profesor de un entorno estructurado donde han tenido la oportunidad de anticipar e interpretar respuestas de estudiantes de bachillerato, colectivamente, les ha proporcionado una herramienta útil para reflexionar sobre el pensamiento matemático de los estudiantes y progresar en su proceso formativo.

3.2. Experimento de Enseñanza 2. Grado en Maestro en Educación Primaria. Asignatura: Practicum. Créditos: 18

Contextualización y marco de referencia

Las nuevas perspectivas educativas en cuanto a la enseñanza de las matemáticas en el siglo XXI (NCTM, 2000), proponen un cambio en la manera de afrontar las relaciones y las interacciones en las aulas mediante la creación de ambientes de aprendizaje en los que los profesores tomen decisiones de acción en función de las ideas que emergen de los estudiantes durante las interacciones de aula. Estas reformas abogan por una mayor flexibilidad de los docentes para atender a las necesidades cognitivas del alumnado mientras se está enseñando (van Es y Sherin, 2002). Esta flexibilidad sugiere que un buen docente necesita ser consciente de lo que ocurre a su alrededor para conducir la clase de manera efectiva (Mason, 1998).

Durante el transcurso de una clase, los acontecimientos se suceden y se superponen dificultando que los docentes puedan atenderlos. Consecuentemente,

han de ser selectivos y focalizar la atención en aquellas acciones que consideran relevantes en función del objetivo de aprendizaje pretendido (Sherin y van Es, 2005). De esta manera, se pone de manifiesto la necesidad de desarrollar, en los docentes, la habilidad para identificar las situaciones de aula importantes para el correcto desarrollo de las competencias del alumnado. No existen dos situaciones de aula iguales y se considera que es necesario un esquema que ayude a predecir, interpretar y a responder a cada problema que emerja de cada aula (Oppewal, 1993)

Desde esta perspectiva, se ha identificado como una competencia docente clave para los docentes, la capacidad de mirar profesionalmente la enseñanza y aprendizaje (Mason, 2002; van Es, 2010; van Es y Sherin, 2002). Para dar respuesta a la necesidad de desarrollar dicha competencia ha surgido en la última década una agenda de investigación (Jacobs, Lamb y Phillipp, 2010; Kersting, Givvin, Sotelo y Stigler, 2010; Llinares, y Valls, 2010; Llinares, 2012a) bajo la hipótesis de que adquirir las habilidades necesarias para mirar profesionalmente un conjunto de situaciones de manera particular demuestra diferentes formas de usar el conocimiento (Erault, 1996).

Por otra parte investigaciones previas han mostrado que el desarrollo de esta competencia no es una tarea fácil pero que con los apoyos necesarios puede desarrollarse en los programas de formación inicial (Hiebert, Morris, Berk y Jansen, 2007; Star, Lynch y Perova, 2011; Weiland, Hudson y Amador, 2014). Así, los resultados previos sobre el desarrollo de esta competencia, indican que tanto los docentes en servicio como los estudiantes para maestro trasladan sus respuestas desde simples descripciones a respuestas más analíticas (Coles, 2012; Llinares, 2013; Llinares y Valls, 2010; Morris, 2006; Santagata, Zannoni, y Stigler, 2007). Aun así, las dificultades mostradas por estos estudios son las que nos empujan a seguir investigando sobre la manera en que se puede seguir progresando, en los programas de formación inicial del profesorado, en el desarrollo de esta competencia

Estas investigaciones previas muestran la posibilidad de desarrollar una mirada profesional en estudiantes para maestro mediante el uso de videoclips, debates virtuales o con reuniones en grupo. Nuestro trabajo se enmarca en esa línea de investigación y pretende progresar en la obtención de nuevos datos que muestren evidencias sobre cómo desarrollar esta competencia en la formación inicial de maestros. En concreto focalizaremos nuestra atención en examinar si la tarea de escribir narrativas observando su propia práctica durante su periodo de prácticas en los centros, puede ayudar a los estudiantes para maestro a desarrollar esta competencia docente.

Fase 1. Diseño y planificación de la instrucción

Para desarrollar en los estudiantes para maestro la competencia docente “mirar profesionalmente” las situaciones de aula relevantes y destacar evidencias sobre la comprensión matemática de los alumnos de primaria, se pidió que escribieran narrativas en las que describieran e interpretaran la situación de enseñanza-aprendizaje identificada en el aula de primaria. La interpretación debía estar fundamentada en los conocimientos sobre didáctica de la matemática que los

estudiantes para maestro habían obtenido durante la formación teórica recibida en las asignaturas del Grado en Maestro en Educación Primaria.

Con la intención de organizar la información y dirigir la atención de los futuros maestros hacia aspectos importantes, se les facilitaron unas preguntas guía, fundamentadas en las tres destrezas de la competencia docente mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Jacobs et al., 2010): (i) identificar y describir las estrategias usadas por los estudiantes, (ii) interpretar la comprensión puesta de manifiesto por los estudiantes en función de los elementos matemáticos identificados en las estrategias y (iii) decidir cómo responder teniendo en cuenta la comprensión de los estudiantes.

a. Describe la situación

La tarea/actividad. Por ejemplo, puedes indicar los contenidos específicos, materiales, uso de las TIC,...

qué hacen los alumnos. Por ejemplo, puedes indicar respuestas de los alumnos a la tarea propuesta, dificultades,...

qué hace el maestro. Por ejemplo, puedes indicar como trabaja la actividad en el aula (agrupación de los alumnos, interacciones...) o si ante las respuestas de los alumnos (o dificultades), propone otras tareas, insiste en algún aspecto de la actividad,...

b. Interpreta la situación

Indica qué objetivos del área de matemáticas se trabajan explicitando qué aspectos de la situación te hacen pensar que se están desarrollando los objetivos identificados.

Indica, a través de las respuestas de los estudiantes, evidencias que muestren la manera en que se están consiguiendo los objetivos propuestos, es decir, evidencias que muestren como los estudiantes están logrando la comprensión de los conceptos matemáticos.

Indica si se desarrollan otras competencias básicas. Muestra evidencias del desarrollo de otras competencias trabajadas en la situación.

c. Completa la situación

Intenta complementar de alguna manera la situación descrita para potenciar el desarrollo de la competencia matemática identificada o algún otro aspecto de la competencia que no se haya contemplado inicialmente.

Fase 2. Implementación

Este experimento fue realizado durante las “prácticas de enseñanza” (practicum) del último año de formación del Grado en Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Alicante, en el que participaron 22 estudiantes para maestro.

La primera parte de las prácticas de enseñanza consistía en un período de observación del proceso de enseñanza y aprendizaje que se generaba en las aulas mientras que la segunda parte consistía en impartir una unidad didáctica creada por ellos. Durante la enseñanza de su unidad didáctica, se pidió a los estudiantes para maestro que escribieran una narrativa en la que identificaran y describieran sucesos en el aula que podían ser considerados potencialmente relevantes para explicar el aprendizaje matemático de los estudiantes. Además, se pidió a los futuros maestros que generaran interpretaciones de estos hechos en el sentido de usar el conocimiento sobre el contexto para razonar sobre las interacciones y sucesos en el aula, y realizar conexiones entre estos sucesos específicos y principios e ideas más generales sobre la enseñanza-aprendizaje. Este último aspecto consistía en la invitación a realizar interpretaciones fundadas en los conocimientos que poseían.

Fase 3. Análisis retrospectivo

Las narrativas se mostraron como un adecuado instrumento para apoyar el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” el pensamiento matemático de los estudiantes. Escribir las narrativas sobre su propia práctica docente permitió a los futuros maestros fijarse en lo que podían ser evidencias de las dificultades de sus alumnos y describirlas para apoyar las inferencias sobre la comprensión.

Creemos que las narrativas pueden ser un buen instrumento a usar en los programas de formación inicial de maestros, y en particular, durante su período de prácticas ayudando a los estudiantes para maestro a identificar aspectos importantes de las situaciones de enseñanza-aprendizaje, interpretarlos y tomar decisiones pertinentes que ayuden a los estudiantes de educación primaria a desarrollar la competencia matemática.

3.3. Experimento de Enseñanza 3. Grado en Maestro en Educación

Primaria. Asignatura: Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria. Créditos: 6

Contextualización y marco de referencia

El maestro necesita un amplio conocimiento de matemáticas y destrezas necesarias para enseñar matemáticas en diferentes dominios de conocimiento: el conocimiento de y sobre las matemáticas, el conocimiento sobre los estudiantes y el conocimiento sobre la enseñanza. Así ha surgido una línea de investigación en educación matemática en torno a la idea de cuál es el “conocimiento de matemáticas para enseñar” que debe tener un maestro para enseñar matemáticas.

La idea del conocimiento de matemáticas para enseñar (mathematical knowledge for teaching, MKT) enfatiza la relación entre el conocimiento de matemáticas y el conocimiento de contenido pedagógico. Schulman (1986) categorizó el conocimiento que los profesores necesitan para enseñar en: conocimiento del contenido matemático (Subject Matter knowledge), conocimiento del contenido pedagógico (Pedagogical Content Knowledge) y conocimiento del currículum. Posteriormente, Ball, Thames y Phelps (2008)

dividen el Subject Matter Knowledge y el Pedagogical Content Knowledge propuestos por Schulman en tres sub-dominios. A su vez, el Subject Matter Knowledge lo dividen en: conocimiento común del contenido (CCK), conocimiento especializado del contenido (SCK) y conocimiento del horizonte matemático. El conocimiento común del contenido se refiere a “un saber hacer” y es el conocimiento que cualquier persona puede usar para resolver un problema matemático. Por ejemplo, saber encontrar la respuesta correcta a una operación matemática. El conocimiento especializado del contenido es el conocimiento de matemáticas que permite a los maestros implicarse en tareas específicas de la enseñanza. Por ejemplo, saber el porqué de un determinado error o utilizar distintas representaciones para un mismo contenido. El conocimiento del horizonte matemático se refiere al conocimiento que permite relacionar el contenido matemático en una lección con posibles desarrollos futuros

El Pedagogical Content Knowledge lo dividen en conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), en el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCT) y en el conocimiento del contenido curricular. El conocimiento del contenido y la enseñanza está relacionado con la secuenciación de las tareas, las estrategias y representaciones a utilizar. El conocimiento del contenido y los estudiantes que está asociado con anticipar las dificultades/facilidades que pueden tener los estudiantes. Por último, el conocimiento del contenido curricular que integra una visión completa de la diversidad de programas para la enseñanza en un determinado nivel de escolaridad así como la diversidad de materiales didácticos disponibles.

Desde la perspectiva de la formación inicial de maestros, aprender el conocimiento de matemáticas necesario para ser maestro significa llegar a comprender la enseñanza de las matemáticas, aprender a realizar las tareas y a usar y justificar los instrumentos que articulan la enseñanza en un contexto institucional (García, 2000; Llinares, 2004; Shulman y Shulman, 2004).

Como un ejemplo de las decisiones tomadas cuando se crean oportunidades para los estudiantes para maestro para aprender el conocimiento para enseñar matemáticas se describe el diseño de un módulo de enseñanza centrado en el desarrollo del razonamiento proporcional, contenido importante a lo largo de la Educación Primaria.

Fase 1. Diseño y planificación de la instrucción

El módulo de enseñanza consta de 4 sesiones de 2 horas. En las dos primeras sesiones, los estudiantes para maestro tenían que resolver actividades relacionadas con las distintas componentes del razonamiento proporcional, examinando diferentes estrategias de resolución y diferentes formas de representación. Estas actividades tenían como objetivo que los estudiantes para maestro re-aprendieran algunos aspectos relativos a las componentes del razonamiento proporcional (Figura 3).

Figura 3. Componentes relativos al razonamiento proporcional: significados, formas de razonar y discriminación de situaciones



Las actividades propuestas en esta primera parte del módulo formarían parte del conocimiento común del contenido y conocimiento especializado del contenido, por ejemplo, el siguiente problema:

La caja con 16kg de cereales A cuesta 3,36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2,64€. ¿Qué caja de cereales es más barata?

En la tercera y cuarta sesión, los estudiantes para maestro se implicaban en tareas centradas en el conocimiento de contenido y los estudiantes, el conocimiento de contenido y la enseñanza y el conocimiento de contenido curricular. Es decir, actividades para dotar de sentido al conocimiento matemático de las situaciones de enseñanza de las matemáticas en la educación primaria desde la perspectiva del aprendizaje, de la elección de las tareas pertinentes y desde el currículo. Así ante un problema relacionado con el razonamiento proporcional y respuestas de estudiantes de primaria que mostraban distintas características del desarrollo del razonamiento proporcional (Figura 4), los estudiantes para maestro tenían que responder a las siguientes cuestiones centradas en la enseñanza y aprendizaje:

- ¿Qué conceptos matemáticos debe conocer un alumno de primaria para resolver esta tarea? Justifica tu respuesta
- ¿Cómo se manifiesta la comprensión de los conceptos matemáticos implicados en cada una de las respuestas
- Si un alumno no comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para ayudarle a que comprendiese estos conceptos?
- Si un alumno comprende los conceptos matemáticos implicados, ¿cómo modificarías la tarea para que aumente su comprensión de los conceptos implicados?

Figura 4. Problema y respuestas de estudiantes de primaria

La caja con 16kg de cereales A cuesta 3,36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2,64€. ¿Qué caja de cereales es más barata?

Respuesta 1

La caja A es más barata
 16 kg A → 3'36 12 kg B → 2'64 p. el kg vale 0'22 y el B 0'22.
 A: $\frac{3'36}{16} \text{ kg} \rightarrow 0'21 \text{ el kg}$ B: $\frac{2'64}{12} \rightarrow 0'22 \text{ el kg}$.

Respuesta 2

16 kg → 3'36 / 12 kg → 2'52 € 16 kg → 3'36 } $\frac{12 \cdot 3'36}{16} =$
 12 kg → 2'64 12 kg → x } 2'52 € con 12 kg.
 @ Es más barata la caja A porque con 12 kg cuesta 2'52 €
 en cambio la B cuesta 2'64 €.

Respuesta 3

A	16 kg
---	-------

 = 3'36 €

B	12 kg
---	-------

 = 2'46 €

Es más barata la caja A ya que contiene 4 kg más y sólo hay de diferencia 0,9.
 $3'36 - 2'46 = 0'9 \text{ €}$

En la primera cuestión los estudiantes para maestro tenían que identificar los procesos relevantes en la resolución del problema (en este caso el proceso *unitizing*). En la segunda cuestión, los estudiantes para maestro tenían que reconocer características de la comprensión de la idea de razón de los estudiantes de primaria, en este caso al proceso *unitizing*, puesto de manifiesto por la manera en la que estaban resolviendo el problema. Esta cuestión está relacionada con el conocimiento del contenido y los estudiantes. En las otras dos cuestiones se les pedía proponer decisiones de acción (modificar el problema) para apoyar al estudiante a comprender los contenidos matemáticos implicados (es decir, el objetivo de aprendizaje identificado) o afianzarlo en el caso de asumir que las respuestas dadas mostraban una comprensión adecuada. Esta última cuestión está relacionada con el conocimiento de contenido y la enseñanza y el conocimiento del contenido curricular.

Fase 2. Implementación

Este experimento de enseñanza se ha implementado durante el curso académico 2014-2015 en 8 grupos, con un total de 475 estudiantes. La asignatura en la que ha sido implementado el módulo de enseñanza es *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria* del Grado en Maestro en Educación Primaria.

Fase 3. Análisis retrospectivo

Los resultados muestran que la estructura adoptada en el experimento de enseñanza parece adecuada para potenciar el uso pertinente del conocimiento de matemáticas en las tareas profesionales. Las tareas utilizadas en el módulo de enseñanza ayudaron a los estudiantes para maestro a desarrollar los distintos

conocimientos necesarios en las tareas profesionales de reconocer evidencias de la comprensión en sus alumnos y proponer nuevas tareas para apoyar la progresión de la comprensión en sus estudiantes. Esto se puso de manifiesto en que los estudiantes para maestro reconocieron el concepto matemático implicado en la tarea (unitizing), es decir, percibieron la necesidad de identificar una unidad de referencia para poder comparar, lo que forma parte del conocimiento especializado del contenido, y reconocieron este proceso en las respuestas de los estudiantes, lo que estaría relacionado con el conocimiento del contenido y los estudiantes.

4. REFLEXIONES FINALES

Esta sección se divide en dos partes. En la primera parte se realiza una reflexión sobre la metodología seguida y los experimentos de enseñanza realizados por los equipos docentes. En segundo lugar se describen las dificultades y prospectiva de futuro a partir del trabajo realizado durante el curso 2014-2015.

4.1. Reflexión sobre la metodología seguida y los experimentos de enseñanza realizados

Los ciclos de diseño-implementación-análisis apoyados en un modelo de aprendizaje del maestro y profesor de matemáticas en el ámbito de Didáctica de la Matemática constituyen un contexto adecuado para la generación de materiales docentes testados científicamente y para el desarrollo de agendas de investigación sobre el aprendizaje de los maestros y profesores de matemáticas. Los ejemplos descritos en este trabajo de diseño, implementación y análisis, como parte de un ciclo de desarrollo, nos permiten identificar las características relevantes de este proceso:

- El diseño de actividades vinculadas a una manera de entender el desarrollo de la competencia docente del maestro y del profesor de matemáticas de secundaria. En particular al poner de manifiesto el vínculo entre la necesidad de explicitar los procesos y conceptos matemáticos que están implícitos en la resolución de determinadas tareas como paso previo a la tarea de reconocer evidencias de la comprensión por parte de los estudiantes, y
- El reconocimiento de crear situaciones en las que el estudiante para maestro y futuro profesor de matemáticas de secundaria pueda aprender el conocimiento necesario para enseñar matemáticas simulando las situaciones en las que dicho conocimiento debe ser usado (interpretar las producciones de los estudiantes y proponer nuevas tareas de enseñanza).

El hecho de que los experimentos de enseñanza diseñados e implementados hayan sido una herramienta útil para reflexionar sobre el pensamiento matemático de los estudiantes y progresar en la competencia docente “mirar profesionalmente” a los futuros maestros y profesores de matemáticas de secundaria nos lleva a diseñar e implementar, en el caso del experimento de enseñanza 1, otros módulos de enseñanza para los distintos contenidos de la asignatura “Aprendizaje de las

Matemáticas en Educación Secundaria” del Master Universitario del Profesorado de Educación Secundaria, especialidad Matemática.

4.2. Dificultades y propuestas de mejora

Las reflexiones sobre la práctica docente realizada por el grupo TICEM durante el curso 2014-2015 ha usado como instrumento metodológico la idea de los “equipos docentes” que han desarrollado los diferentes experimentos de enseñanza. Estos equipos docentes estaban en contacto a través de un grupo de trabajo del campus virtual de la UA (herramienta “Trabajo en grupo”). En ese sentido, la creación de equipos docentes por materias, la comunicación a través del grupo de trabajo y la realización de una reunión conjunta de coordinación al inicio y varias reuniones conjuntas de análisis, reflexión y elaboración de informes al final, facilitó la coordinación y colaboración entre los profesores que compartían la misma materia.

En próximas ediciones se seguirá potenciando el uso del trabajo en grupo ya que se ha constatado que la cooperación y la colaboración entre los miembros de los equipos docentes han sido piezas clave en el desarrollo e implementación de metodologías docentes que proporcionen una formación eficaz en competencias en relación a la enseñanza de las matemáticas y en el diseño de materiales curriculares dirigidos al desarrollo de las competencias vinculadas a los diferentes títulos universitarios.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Blázquez, S. & Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, 67-83.
- Callejo, M.L., Valls, J. y Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela*, 61, 5-21.
- Clements, D.H. & Sarama, J. (2009). Learning and teaching early math: The learning trajectories approach. Routledge: New York.
- Coles, A. (2012). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of Mathematics Teacher Education*, online first, DOI 10.1007/s10857-012-9225-0.
- Confrey, J., Maloney, A. & Corley, A. (2014). Learning trajectories: a framework for connecting standards with curriculum. *ZDM. Mathematics Education*, 46, 719-733.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167 – 192.
- Erault, M. (1996). Developing Professional Knowledge and competence. London: Falmer Press.
- Fernández, C., Callejo, M.L., Valls, J. y Llinares, S. (2013). Uso de videoclips para aprender a enseñar matemáticas a los futuros maestros. En M. T. Tortosa, J. D. Álvarez, N. Pellín (Coords.), XI Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria [Recurso electrónico]: *Retos de futuro en la enseñanza superior: docencia e*

investigación para alcanzar la excelencia académica (pp. 484-497). Vicerrectorado de Planificación Estratégica y Calidad- Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Alicante.

- Fernández, C., Valls, J., Callejo, M.L., y Llinares, S. (2012). Uso de la herramienta “grupos de trabajo” para la coordinación docente. En M.T. Tortosa, J.D. Álvarez, N. Pellín (coords.), X Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria [Recurso electrónico]: la participación y el compromiso de la comunidad universitaria (pp.347-357). Vicerrectorado de Planificación Estratégica y Calidad- Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Alicante.
- Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2011). Development of prospective Mathematics Teachers’ Professional noticing in a specific domain: Proportional Reasoning. En Ubuz, B. (Ed.), Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (vol. 2, pp. 329-2336). Ankara, Turkey: PME.
- Fortuny, J.M. y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 1, 23-37.
- Franke, M.L. & Kazemi, E. (2001). Learning to Teach mathematics: Focus on Student Thinking. *Theory in practice*, 40(2), 102-109.
- Hiebert, J., Morris, A.K., Berk, D. y Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education*, 58, 47-61.
- Jacobs, V.R., Lamb, L.C. y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169-202.
- Kersting, N. B., Givvin, K., Sotelo, F. y Stigler, J. W. (2010). Teacher’s analysis of classroom video predicts student learning of mathematics: Further explorations of a novel measure of teacher knowledge. *Journal of Teacher Education*, 61, 172-181.
- Llinares, S. (2014). Experimentos de enseñanza e investigación. Una dualidad en la práctica de formador de profesores de matemáticas. *Educación Matemática*, nº extraordinario, marzo, 31-51.
- Llinares, S. (2013). Professional Noticing: A component of the mathematics teachers’ professional practice. *SISYPHUS. Journal of Education*, 1(3), 76-93.
- Llinares, S. (2012a). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53 – 70.
- Llinares, S. (2012b). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 10, 53-62.
- Llinares, S. (2004). La generación y uso de instrumentos para la práctica de enseñar matemáticas en educación primaria. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 36, 93-115.
- Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, 17, 51-63.
- Llinares, S. y Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers’ learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 13, 177-196.
- Llinares, S., Valls, J., Callejo, M.L., Roig, A.I., Penalva, M.C., Torregrosa, G., Martínez, C., Moncho, A. y Reig, C. (2007). Estructuras metodológicas y diseño de materiales en

el ámbito de didáctica de la matemática. Hacia el EEES en la formación de maestros. Capítulo libro ICE-UA experiencias 2005-2006.

- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.
- Mason, J. (1998). Enabling teachers to be real teachers: Necessary levels of awareness and structure of attention. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 1(3), 243-267.
- Morris, A. K. (2006). Assessing pre-service teachers' skills for analyzing teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 471-505.
- Oppewal, T. J. (1993). Preservice teachers' thinking about classroom events. *Teaching and Teacher Education*, 9(2), 127-136.
- Penalva, M.C., Valls, J., Rey, C., Cos, A., Llinares, S. y Torregrosa, G. (2005). *El papel del profesor en el aprendizaje colaborativo de Didáctica de la Matemática en investigar en diseño curricular*. Redes de docencia en el Espacio Europeo de Educación Superior (vol II, 263-278). Alcoy (Alicante), Marfil.
- Pons, J. (2014). Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto. Tesis Doctoral. Universidad de Alicante. Alicante. España
- Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Jaén: SEIEM.
- Rey, C., Penalva, M.C. y Llinares, S. (2007). Aprendizaje colaborativo y formación de asesores en matemáticas. Análisis de un caso. *Quadrante*, XV (1e2), 95-120.
- Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2014). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and mathematics Education*, DOI: 10.1007/s10763-014-9544-y.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 2 - 14.
- Shulman, L. S. y Shulman, J. H. (2004). How and what teachers learn: a shifting perspective. *Journal of Curriculum Studies*, Vol. 36, 2, 257-271.
- Santagata, R., Zannoni, C. y Stigler, J.W. (2007). The role of lesson analysis in preservice teacher education: An empirical investigation of teacher learning from a virtual video-based field experience. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10, 123-140.
- Sherin, M. G., Jacobs, V. R. & Philipp, R. A. (eds) (2010), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.
- Sherin, M., y van Es, E. (2005). Using video to support teachers' ability to notice classroom interactions. *Journal of technology and teacher education*, 13(3), 475-491.
- Simon, M. (2000). Research on the development of mathematics teachers: The teacher development experiment. En A. Kelly y R. Lesh (eds), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 335-359). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Pubs.
- Sztajn, P., Confrey, J., Wilson, P.H. & Edgington, C. (2012). Learning trajectory based instruction: Toward a theory of teaching. *Educational Researcher*, 41(5), 147-156.
- Star, J. R., Lynch, K. H. y Perova, N. (2011). Using video to improve mathematics' teachers' abilities to attend to classroom features: A replication study. En M.G. Sherin, V. Jacobs y R. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing* (pp. 79-94). New York: Routledge

- Valls, J., Callejo, M.L., LLinares, S., Penalva, M.C., Torregrosa, G. y Roig, A.I. (2009). Matemáticas y su Didáctica. En *Un proyecto colaborativo en la Facultad de Educación. Guías docentes de la titulación de Maestro* (pp. 93-114). Alcoy: Editorial Marfil.
- van Es, E. (2010). A framework for learning to notice student thinking. En Sherin, Jacobs y Philipp, (Eds), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). New York: Routledge.
- van Es, E. y Sherin, M.G. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education*, 10, 571-596.
- Weiland, I. S., Hudson, R. A. y Amador, J. M. (2014). Preservice Formative Assessment Interviews: the Development of Competent Questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12(2), 329-352.
- Wilson, P.H., Sztajn, P., Edgington, C. & Confrey, J. (2014). Teachers' use of their mathematical knowledge for teaching in learning a mathematics learning trajectory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 149-175.
- Wilson, P.H., Mojica, G.F. & Confrey, J. (2013). Learning trajectories in teacher education: Supporting teachers' understandings of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, 32, 103-121.